

Usos del error en la enseñanza de las matemáticas

Error uses in teaching mathematics

María José González López
Pedro Gómez
Ángela María Restrepo



GOBIERNO
DE ESPAÑA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN, CULTURA
Y DEPORTE



Calidad de Revistas
Científicas Españolas
FECYT | MARCO COOPERATIVO
DE CALIDAD CIENTÍFICA | 2013

Usos del error en la enseñanza de las matemáticas¹

Error uses in teaching mathematics

DOI: 10.4438/1988-592X-RE-2015-370-297

María José González López

Universidad de Cantabria, Dpto. de Matemáticas, Estadística y Computación

Pedro Gómez

Ángela María Restrepo

Centro de Investigación y Formación en Educación de la Universidad de Los Andes

Resumen

Los errores de aprendizaje están presentes en muchas de las decisiones que el docente toma en relación con la enseñanza de las matemáticas. Pero, las investigaciones sobre el uso del error en la formación de profesorado son escasas, aunque algunas de ellas muestran que la formación en este ámbito hace a los estudiantes más conscientes de su aprendizaje y mejora su rendimiento. En este artículo, identificamos y describimos los usos del error que 26 docentes de matemáticas de secundaria (organizados en grupos) manifestaron en el contexto de un programa de formación de profesorado de matemáticas en ejercicio de dos años de duración. Para ello, desarrollamos un marco conceptual sobre procesos de toma de decisiones del profesorado cuando planifica la enseñanza de temas de matemáticas. Este marco conceptual está basado en las nociones de propósito, acción y resultado. Con base en este marco conceptual, establecimos un conjunto inicial de categorías que nos permitió codificar los informes finales de los grupos de docentes. En estos informes, ellos registraron las decisiones que tomaron al elaborar sus unidades didácticas de matemáticas y las justificaciones que les llevaron a tomarlas. Realizamos un proceso cíclico de refinado de las categorías y de nueva codificación de la evidencia con las nuevas categorías para

⁽¹⁾ Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto EDU2012-33030 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España

verificar su validez. Este proceso nos permitió establecer una jerarquía entre los propósitos, las acciones y los resultados. Encontramos que los usos del error se organizan según tres propósitos generales: superar el error, evaluar el estado cognitivo de los estudiantes y producir información útil para otros aspectos de la planificación. Caracterizamos cada uno de estos usos mediante los propósitos concretos asociados a los propósitos generales, las acciones asociadas a cada propósito y los resultados vinculados a cada acción. Consideramos que conocer estos usos resulta útil para el diseño y desarrollo de programas de formación de profesores.

Palabras clave: Errores de aprendizaje, matemáticas, toma de decisiones, planificación curricular, educación secundaria, formación del profesorado.

Abstract

Learning errors arise when teachers make decisions in their teaching. Nevertheless, research on error use in teacher education is scarce, even if some of that research shows that educating teachers on this topic help their students become more conscious of their learning and improves their performance. In this paper, we identify and describe the uses of error that 26 secondary mathematics teachers (organized in groups) revealed in a two years long teacher education program. For that purpose, we developed a conceptual framework on teachers' decision making when they plan lessons on mathematical topics. This framework is based on the ideas of purpose, action and result. We used this framework for constructing an initial set of categories with which we codified the final reports that the groups of teachers produced in the program. We looked for the decisions made by the groups in their lesson planning and the justifications that they gave for those decisions. We refined the categories in a cyclic process of coding and revision of the categories. This process enabled us to establish a hierarchy of purposes, actions and results. We found that the uses of error can be organized according to three general teachers' purposes: overcoming the error, assessing students' cognitive state, and producing information that can be useful in other aspects of lesson planning. For each of these general purposes, we identified the specific purposes, actions and results that configure each error use that we found in the groups of teachers written productions. We consider that knowledge about these uses is useful for the design and development of teacher education programs.

Keywords: Learning errors, mathematics, decision-making, lesson planning, secondary education, teacher education.

Introducción

El error es un elemento inherente a cualquier proceso de aprendizaje (Borasi, 1994; Lannin, Barker y Townsend, 2007; NCTM, 2000; Rico, 1997). En la literatura, abundan las investigaciones en las que los docentes identifican los errores habituales de los estudiantes sobre algún tema matemático, indagan sobre la fuente de los mismos y desarrollan propuestas orientadas a que los escolares puedan superarlos (Santagata, 2005; Son, 2013; Son y Sinclair, 2010). Que los estudiantes superen los errores habituales de un tema es, por tanto, un propósito destacado del docente cuando lleva a cabo la planificación de un tema matemático. Pero el error puede estar presente en otras decisiones que toma el docente relacionadas con la enseñanza de las matemáticas. En este artículo, describimos en detalle los procesos en los que el profesorado utiliza el error durante la planificación y la implementación de temas de matemáticas. Concretamente, nos basamos en un marco conceptual sobre la noción de decisión, para identificar la amplia variedad de usos que unos grupos de docentes en formación hicieron del error en el contexto de un plan de formación de profesorado de matemáticas en ejercicio.

En lo que sigue, comenzamos mostrando la relevancia de la investigación sobre el error en la Educación Matemática y justificamos este trabajo como contribución a la problemática actual sobre el tema. Después, presentamos nuestra aproximación a los procesos de toma de decisiones como marco conceptual que nos permite caracterizar los usos del error en la planificación de temas de las matemáticas escolares. Con base en esa idea, definimos lo que entendemos como uso del error y establecemos los focos del estudio. Seguidamente, describimos el contexto del estudio empírico, concretamos las fuentes de información utilizadas y los instrumentos y procedimientos con los que recogimos y analizamos esa información. A continuación, presentamos los usos del error identificados en el estudio empírico. Finalmente, reflexionamos sobre los usos del error en los planes de formación de profesorado de matemáticas.

Justificación y relevancia

Las teorías del aprendizaje consideran el error de diferentes maneras (Santagata, 2005). Por ejemplo, en las teorías conductistas, el error se

considera como una deficiencia del conocimiento del estudiante que el docente debe corregir. El constructivismo considera el error como el producto de la puesta en juego de un conocimiento en un contexto que no corresponde. Esta visión del error tiene consecuencias para la enseñanza. Se busca que los nuevos conocimientos surjan de situaciones que desequilibren el conocimiento del sujeto porque sus estructuras cognitivas no le permiten abordar adecuadamente la situación (Simon y Schifter, 1991, p. 310). La enseñanza basada en una visión constructivista del aprendizaje implica entonces que el docente puede inducir a los escolares a incurrir en el error, hacer que constaten su error y generar el conflicto cognitivo que les lleve a modificar su conocimiento (An y Wu, 2012; Borasi, 1996; Brousseau, 2001; NCTM, 2000).

Con base en esta visión constructivista del aprendizaje, diversos investigadores han propuesto estrategias de enseñanza basadas en el error. Por ejemplo, Borasi (1994) sugiere que los errores se pueden usar como trampolines para la indagación y muestra que esta estrategia tiene efectos positivos en el aprendizaje de los escolares; Schoenfeld (2011) sugiere la enseñanza por diagnóstico, en la que los docentes se anticipan a las actuaciones de los escolares (incluyendo los errores) y construyen su enseñanza con base en esas previsiones; Garuti, Boero y Chiappini (1999) proponen el juego de “voces y ecos” para abordar los errores conceptuales; y Lannin et al. (2007) y Prediger (2010) proponen que los errores se usen como catalizadores para el aprendizaje. Estos y otros investigadores han propuesto diversas formas en las que el docente podría usar el error en la enseñanza. ¿Qué nos dice la investigación sobre el uso que el profesorado hace del error en su práctica docente?

Aunque algunos investigadores han indagado sobre el uso que el profesorado hace del error en su práctica, la literatura sobre este tema es escasa (Heinze y Reiss, 2007; Santagata, 2005). En su estudio comparativo de docentes estadounidenses e italianos, Santagata estableció las siguientes categorías para caracterizar su actuación ante el error. El docente (a) proporciona la respuesta correcta; (b) repite la pregunta al estudiante que incurrió en el error; (c) reformula la pregunta, proporcionando alguna ayuda; (d) pide al estudiante que explique cómo llegó a su respuesta; (e) utiliza las estrategias anteriores con un estudiante diferente al que incurrió en el error; (f) le pregunta a la clase que identifique el error y haga propuestas; (g) escoge la respuesta correcta de las propuestas hechas por los estudiantes. Ella encontró que en las

clases italianas el error se trata de manera pública, mientras que en las clases estadounidenses el docente aborda el error con el estudiante que incurrió en él. En los dos países, la reacción más frecuente del docente consiste en corregir él mismo el error. Las ayudas que proporcionan consisten principalmente en simplificar el problema que dio origen al error. Los docentes italianos tienden a proporcionar la ayuda al estudiante que incurrió en el error, mientras que los docentes estadounidenses se dirigen a otro estudiante.

Otros estudios han producido resultados similares. Algunos de estos estudios muestran, por ejemplo, que los docentes ingleses tienden a proteger la autoestima de los estudiantes, los docentes franceses reaccionan directamente a los errores de los estudiantes, mientras que los docentes japoneses abordan los errores desde una perspectiva positiva, tomando los errores como fuente de discusión en clase. Schleppenbach, Flevares, Sims y Perry (2007) encontraron que, mientras que los docentes estadounidenses tienden a evitar o esconder el error, los docentes chinos buscan que los estudiantes reflexionen sobre sus causas. Son y Crespo (2009) establecieron que los futuros docentes de matemáticas tienden a centrarse en repetir los procedimientos hasta que los escolares reconocen el error, dejando a un lado los aspectos conceptuales que pueden estar detrás del error. En un estudio más reciente, Son (2013) confirmó este resultado, que parece explicarse por las diferencias culturales relacionadas con factores históricos y de contexto (Santagata, 2005, p. 493).

Hay pocos estudios sobre la formación de profesorado en el uso del error (Heinze y Reiss, 2007, p. 3-10). En su meta-análisis de los efectos en la formación de profesorado en el manejo del error, Keith y Frese (2008) encontraron que, en los 24 estudios considerados, el efecto fue positivo y significativo. En el caso de la Educación Matemática, Rach, Ufer y Heinze (2013) encontraron efectos positivos de formar docentes en un ambiente tolerante a los errores en la actitud de los estudiantes, aunque no constataron efectos significativos a nivel cognitivo. El estudio de Heinze y Reiss (2007) mostró que formar al profesorado en el uso del error en clase hace a los estudiantes conscientes del manejo del error y mejora su rendimiento. Por otra parte, Brodie (2014) describió cómo el trabajo en comunidades de aprendizaje promueve que los docentes en formación puedan identificar, interpretar y abordar el error (como lo sugiere Prediger, 2010) y que ese trabajo los induzca a reflexionar sobre su propio conocimiento.

Nuestro estudio se ubica en el contexto general de la problemática de investigación que acabamos de describir y centra su atención en la caracterización del uso del error por parte del profesorado de matemáticas que participa en un programa de formación.

Procesos de toma de decisiones

En la copiosa literatura existente sobre procesos de toma de decisiones, se dan distintos enfoques dependiendo del contexto en el que se plantean los problemas sobre los que hay que decidir (Hansson, 2005). Muchos de los desarrollos corresponden al ámbito de la economía y se basan en modelos estadísticos (Savage, 1951), pero también hay otros contextos, como la medicina, el medioambiente, la política o la educación, en los que predominan los análisis de carácter cualitativo (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982). Algunos de los estudios más recientes se orientan a determinar si las decisiones están predeterminadas o si se construyen soluciones a medida para cada situación que se presenta. Se ha observado que en los entornos con múltiples restricciones, los responsables de la toma de decisiones construyen soluciones a medida para cada situación concreta (Stefaniak y Tracey, 2014).

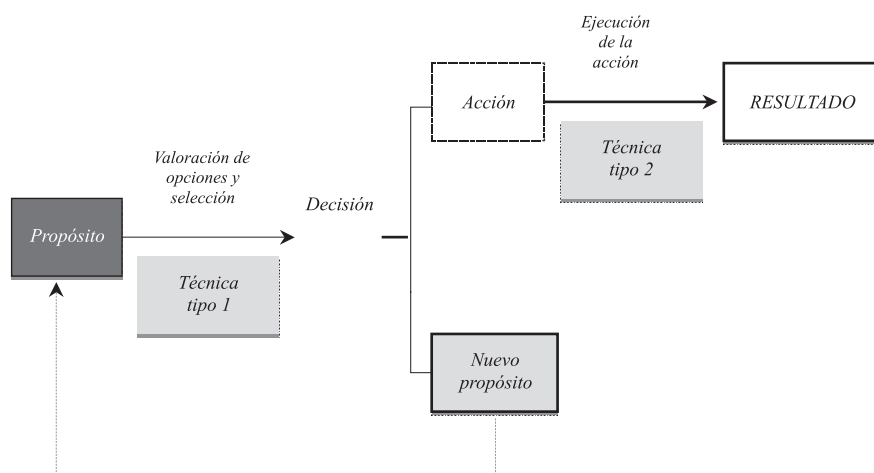
En el ámbito educativo, Bishop (1976) señala los procesos de toma de decisiones del profesorado como acciones centrales en la enseñanza. Estos procesos también se han analizado desde distintos puntos de vista (Borko, Roberts y Shavelson, 2008). Muchas de las investigaciones han analizado los factores que intervienen en las decisiones del docente en el aula en situaciones altamente interactivas en las que se requiere una reacción inmediata y espontánea a las incidencias que surgen en la práctica (ver, por ejemplo, Schoenfeld, 2010), aunque algunos estudios también han estudiado las decisiones del profesorado basadas en el análisis de datos sobre el progreso de los estudiantes (Schifter, Natarajan, Ketelhut y Kirchgessner, 2014). Con mucha frecuencia, estos estudios tratan de derivar consecuencias sobre los procesos de formación del profesorado, especialmente en el ámbito de la formación inicial (Call, 2012; Rich y Hannafin, 2008).

Nosotros nos interesamos en los procesos de toma de decisiones del docente en formación cuando planifica y reflexiona fuera del aula sobre la enseñanza de una unidad didáctica. En este contexto, el docente realiza un proceso de reflexión pausado y extendido en el tiempo. Describimos a continuación la estructura de este proceso.

Estructura del proceso de toma de decisiones

Una decisión es el resultado de un proceso cognitivo llevado a cabo por una persona o por un grupo de personas que eligen una opción entre un conjunto de posibilidades con la intención de lograr un propósito. Nos inspiramos en las ideas de Bishop (1976), Shavelson, Webb y Burstein (1986) y Evans, Over y Handley (2003) para proponer el esquema de la figura I. Este esquema representa la estructura básica de los procesos de toma de decisiones del docente cuando planifica la enseñanza de una unidad didáctica fuera del aula. En él, aparecen las nociones clave en el proceso: propósito, técnica, decisión, acción y resultado, que se describen más abajo y se ejemplifican en el caso del concepto de error. El proceso comienza con un propósito del docente. Para alcanzar este propósito, el docente tiene una serie de opciones disponibles. El docente toma una decisión cuando, al poner en práctica determinadas técnicas, elige una de esas opciones. La decisión puede ser de dos tipos: (a) una acción, en cuyo caso el docente lleva a cabo una técnica para ejecutarla y obtiene un resultado, y (b) un nuevo propósito, más concreto que el primero, en cuyo caso el proceso comienza de nuevo.

FIGURA I. Estructura básica del proceso de toma de decisiones y nociones clave



Propósito, técnica, decisión, acción y resultado

Los propósitos del docente al afrontar la planificación de un tema de matemáticas cuando atiende al error de los escolares pueden tener un carácter general o pueden ser muy concretos. Para alcanzar un propósito general, es frecuente que el docente baraje como opciones posibles otros propósitos más concretos. En este caso, su decisión será uno de dichos propósitos concretos. Por ejemplo, para alcanzar el propósito general:

- P: ayudar a los estudiantes a superar los errores del tema, el docente toma la decisión de alcanzar un propósito más concreto como:
- P1: secuenciar las tareas matemáticas del tema de modo que se introduzcan progresivamente los errores.

Esta concreción de propósitos se puede repetir varias veces, de modo que se produce un encadenamiento de propósitos hasta que llega un momento en que el propósito es suficientemente concreto como para que las opciones que se tienen sean acciones, es decir, actuaciones concretas del docente que dan lugar a un resultado. Por ejemplo, cuando el docente tiene el propósito concreto de secuenciar las tareas del tema (P1), toma una decisión eligiendo entre acciones como las siguientes:

- A1: introducir las tareas en orden creciente de dificultad, de modo que las tareas que enfrentan al estudiante al error aparecen sólo al final de la secuencia, o
- A2: distribuir las tareas de modo que aparezcan situaciones que enfrentan al estudiante al error en todas las sesiones de la unidad didáctica.

Cuando se ejecuta una acción se produce un resultado. En este caso, la acción A1 genera una lista ordenada de tareas que contiene tareas sencillas al inicio y complejas al final de la secuencia, y la acción A2 genera otra lista ordenada de tareas que contiene tareas complejas desde el principio al final. Aunque un propósito concreto y una acción pueden tener enunciados similares, se distinguen porque esta última genera un resultado.

Una técnica es un conjunto de procedimientos rutinarios, sustentados en razonamientos, que permiten resolver un problema. En el esquema de

figura I, distinguimos dos tipos de técnicas: (a) técnicas para tomar una decisión (tipo 1) y (b) técnicas para realizar acciones (tipo 2). Las técnicas para tomar una decisión permiten al docente valorar las opciones disponibles y seleccionar una de ellas. Las técnicas para realizar acciones permiten al docente generar un resultado a partir de la opción seleccionada. Por ejemplo, si el propósito del docente es implementar tareas que contribuyan a la superación de los errores, entonces él puede implementar técnicas para valorar las múltiples opciones disponibles, y seleccionar una particular —i. e., prever ayudas para los escolares durante la realización de la tarea—. Estas técnicas de valoración pueden atender al efecto de las ayudas o de otras opciones en la superación de los errores por parte de los estudiantes. Una vez que ha tomado la decisión y genera una acción (prever ayudas), el docente pone en juego técnicas para realizarla y obtener un resultado. Él puede, por ejemplo, analizar cada error en el que los escolares pueden incurrir y producir preguntas que induzcan a los escolares a hacerse conscientes del error. El resultado de realizar la acción con esa técnica es un listado de preguntas asociadas a los errores.

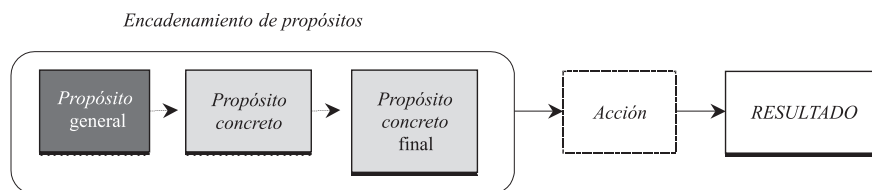
Seguidamente utilizamos el marco conceptual que acabamos de describir para caracterizar lo que entenderemos por uso del error en este trabajo y formular los focos del estudio.

Uso del error y foco del estudio

Teniendo en cuenta el marco conceptual que acabamos de describir, consideramos que un uso del error es un proceso formado por un encadenamiento de propósitos del docente en el que interviene la idea de error, una acción asociada a ese encadenamiento de propósitos y el resultado de dicha acción (figura II). La acción distingue el uso, está vinculada al propósito al final del encadenamiento, es la decisión que el docente toma para lograrlo y genera un resultado que tiene consecuencias sobre la planificación o la implementación de un tema. Como lo describimos en la figura I, al abordar un propósito general, el docente puede decidir ejecutar una acción o formular un nuevo propósito más concreto. Por consiguiente, el encadenamiento de propósitos parte de un propósito general y puede implicar uno o más propósitos concretos que lo singularizan. De esta forma, un uso del error se caracteriza por

tres componentes: el encadenamiento de propósitos, la acción vinculada al propósito concreto final y el resultado de esa acción.

FIGURA II. Esquema de la noción de uso del error



En este estudio indagamos sobre los usos del error desde una perspectiva empírica, al identificar los usos que unos grupos de docentes en formación hicieron del error en el contexto de un plan de formación de profesorado de matemáticas en ejercicio.

Metodología

En este apartado, describimos el contexto en el que se realizó el estudio empírico, los sujetos que participaron en él, las fuentes de información que utilizamos y el proceso de codificación que realizamos sobre los datos.

El programa de formación continua de profesorado de matemáticas en el cual se realizó esta investigación se organiza en torno a la planificación, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas. A lo largo de dos años y trabajando en grupos de cuatro personas, los docentes que participan en el programa llevan a cabo un procedimiento sistemático en virtud del cual analizan el contenido matemático desde distintos puntos de vista (p. ej., sistemas de representación posibles, errores habituales, fenomenología asociada); determinan los objetivos de aprendizaje que pretenden desarrollar; diseñan una secuencia de tareas que contribuya al logro de los objetivos; hacen una previsión de las actuaciones de los escolares al abordar tareas;

diseñan los instrumentos de observación que permitan evaluar el aprendizaje y la enseñanza; implementan el diseño curricular propuesto en su institución educativa; evalúan la relevancia y eficacia de la planificación realizada; y producen un nuevo diseño mejorado. Cada grupo registra estos aspectos por escrito hasta conformar un informe final y una unidad didáctica sobre un tema matemático. El informe, que consta de unas 100 páginas, recoge los análisis del contenido matemático que se han realizado, las decisiones que los grupos tomaron durante el proceso de elaboración de la unidad didáctica y las justificaciones que fundamentan dichas decisiones². Al describir estas decisiones y justificaciones, los docentes muestran los propósitos que les guían, las acciones que proponen y los resultados que obtienen. Los errores de aprendizaje pueden aparecer a lo largo de todo el proceso. Utilizamos, por tanto, estos informes como fuentes de información para identificar los usos del error.

El estudio se realizó con la primera cohorte del programa en la que participaron 26 docentes de secundaria de matemáticas que se organizaron en 6 grupos. Los temas que los grupos trabajaron fueron los siguientes: adición y sustracción de números enteros, ecuaciones lineales (dos grupos), método gráfico para resolver ecuaciones lineales 2×2 , y razones trigonométricas (2 grupos). Los docentes otorgaron su consentimiento por escrito a participar en el estudio.

Para analizar los informes de los grupos, establecimos inicialmente unas categorías básicas que surgen del marco conceptual sobre procesos de toma de decisiones presentado antes: el propósito manifestado por el grupo de docentes, la acción que proponen o el resultado que obtienen. Seleccionamos en los informes todos aquellos extractos de texto en los que los docentes hacen referencia a los errores y, en cada extracto de texto, identificamos la aparición de alguno de los elementos correspondientes a esas categorías de análisis.

El siguiente es un ejemplo de uno de los extractos de texto seleccionados.

Cuando los estudiantes se enfrenten a un error o a una dificultad, el profesor debe re-direccionar a los estudiantes con preguntas que

⁽²⁾ Los informes de los grupos de docentes en formación se pueden descargar en ***[información eliminada para preservar el anonimato]***

provoquen una argumentación de las acciones desarrolladas, para poder superar el error.

En este extracto de texto, identificamos el propósito “superar el error” y la acción “re-direccionar con preguntas”. No se constata de forma explícita el resultado. Para ello, tendría que haber aparecido en el extracto el listado concreto de preguntas a las que hacen referencia.

Así, cada extracto de texto queda codificado mediante una terna (propósito, acción, resultado), en la que uno o dos de los campos pueden aparecer vacíos. Una vez realizada esta primera codificación, llevamos a cabo un proceso cíclico para organizar e interrelacionar entre sí las ternas obtenidas. Inicialmente, agrupamos las ternas formadas por propósitos, acciones y/o resultados similares. Con base en esta agrupación, establecimos una jerarquía entre los propósitos, al distinguir los generales de los concretos; identificamos conjuntos de acciones asociadas a cada propósito concreto; y agrupamos conjuntos de resultados asociados a una misma acción. Este procedimiento nos permitió establecer categorías de análisis más refinadas. Con base en estas nuevas categorías, volvimos a la evidencia, para codificar de nuevo los extractos de texto y verificar la validez de las nuevas categorías y sus relaciones. Este proceso cíclico de utilizar la evidencia para refinar las categorías básicas que, a su vez, se validan al codificar de nuevo la evidencia nos permitió refinar sucesivamente las categorías y darles estructura (Corbin y Strauss, 1990). Finalizamos este proceso cuando llegamos a tener grupos de propósitos, acciones y resultados que no compartían entre sí suficientes elementos como para poder reagruparse.

Finalmente, establecimos los usos del error, que presentamos en el siguiente apartado, al relacionar aquellos extractos de texto que se corresponden con la jerarquía de las categorías refinadas que obtuvimos en este proceso. Por ejemplo, en la tabla I, mostramos cuatro extractos de texto relacionados que, conjuntamente, ejemplifican un uso del error. En el extracto A, los docentes en formación manifiestan el propósito general de superar errores; en el extracto B, concretan ese propósito indicando que buscan tareas que induzcan al estudiante a incurrir en errores; en el extracto C, el grupo se dispone a ejecutar la acción de seleccionar tareas; y en el extracto D, muestran como resultado una tarea concreta —denominada por ellos Rueda de Chicago— que ha sido seleccionada para superar un error concreto. Los cuatro extractos están

separados en el documento, pero están asociados a ternas agrupadas y jerarquizadas. Esto nos permite describir un uso del error: con el propósito de superar errores, los docentes se proponen seleccionar tareas adecuadas, ejecutan la acción de seleccionar dichas tareas y muestran una de ellas como resultado.

TABLA I. Codificación de extractos de texto que conjuntamente forman un uso del error

Id.	Extracto	Propósito	Acción	Resultado
A	"En la planeación [...] buscamos acentuar las expectativas de aprendizaje de la unidad didáctica al incluir la superación de las dificultades"	Superar errores		
B	"Los errores han sido una guía principal en la formulación de las tareas"	Conseguir tareas que induzcan al estudiante a incurrir en el error		
C	"Procedemos a concretar las tareas, haciendo uso de la información obtenida mediante los organizadores del análisis de instrucción que acabamos de presentar"		El grupo selecciona tareas	
D	<i>En la tarea Rueda de Chicago, al momento de solicitar la respuesta de la situación inicial [...] se pide a los estudiantes que [...] trasladen esos resultados a la situación del problema. De esta forma, se trata de superar el error E7.4</i>	Superar errores		Tarea concreta

El establecimiento de jerarquías entre categorías y, por ende, entre extractos de texto no es una labor automática. Requiere de una intensa labor de interpretación y justificación por parte de los investigadores que, por un lado, ponen en juego su conocimiento del programa de formación en el que se obtuvieron los datos y, por otro lado, miran los extractos desde el marco conceptual elegido para analizarlos.

Resultados: descripción de usos del error

En este apartado, describimos la jerarquía de categorías de propósitos, acciones y resultados que obtuvimos. Para facilitar la presentación de

resultados, asociamos esta jerarquía a la descripción de los 16 usos del error que obtuvimos.

La categoría básica de propósitos nos proporcionó los tres propósitos generales siguientes para los que los docentes de la muestra usan el error al planificar un tema de matemáticas.

- Para que los estudiantes superen los errores propios del tema.
- Para evaluar el estado cognitivo de los estudiantes.
- Para producir información útil en otros aspectos de la planificación.

Cada uno de estos tres propósitos delimita un conjunto de usos del error que se van concretando de distintas maneras y en distintos momentos del proceso de planificación. En los tres subapartados siguientes los describimos y los acompañamos de ejemplos de propósitos, acciones o resultados que aparecen en los documentos analizados.

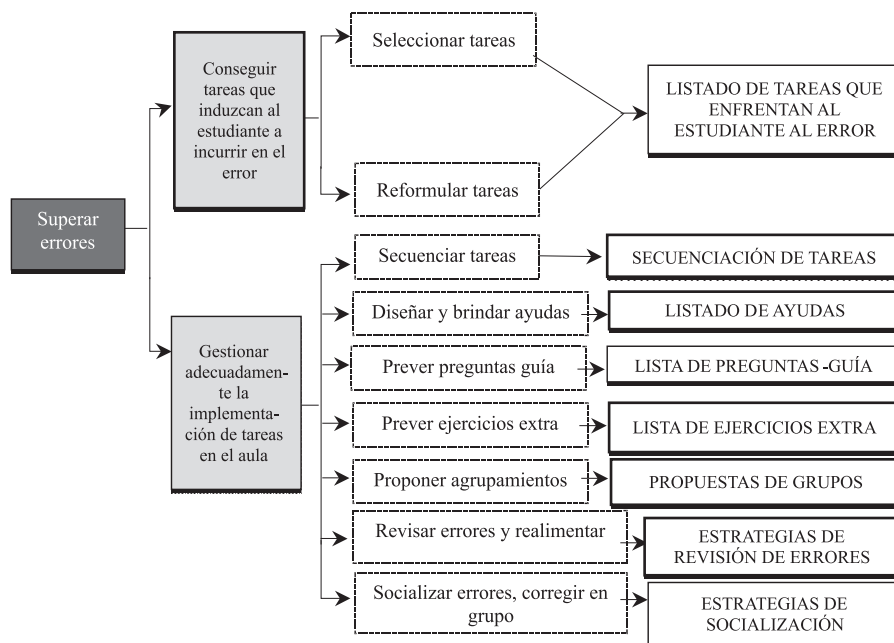
Usos asociados al propósito de superar los errores propios del tema

Superar los errores propios del tema es el propósito general que los docentes manifiestan de forma más frecuente dentro del contexto de formación que estamos considerando. Los docentes expresan este propósito en el informe final a través de extractos como el siguiente.

La unidad didáctica que exponemos a continuación aborda los elementos que consideramos necesarios para la solución de las dificultades que los estudiantes de grado séptimo encuentran al resolver situaciones que involucran la adición y sustracción de números enteros.

La figura III, que explicamos a continuación, expresa gráficamente las categorías de acciones y resultados que aparecen. Establecimos nueve usos del error. Ejemplificamos algunos de ellos en lo que sigue mediante distintos extractos de los informes finales de los docentes.

FIGURA III. Esquema de los usos del error para el propósito I



El propósito general de superar errores se reformula en dos propósitos concretos. El primer propósito concreto es conseguir tareas que induzcan al estudiante a incurrir en errores. Este propósito da lugar a la realización de dos tipos de acciones: seleccionar tareas a partir de un conjunto de tareas dadas y reformular tareas existentes. Por ejemplo, en el siguiente extracto, observamos que los docentes formulan una parte de una tarea con el propósito explícito de superar un error.

Para superar el error E4, al que no asociamos ninguna capacidad, introducimos en la segunda fase [de la tarea Rueda de Chicago] el trabajo con las identidades, de modo que los estudiantes puedan inferir los resultados y los generalicen.

Las dos acciones —seleccionar tareas y reformular tareas— dan lugar al mismo resultado: un listado de tareas que enfrentan al estudiante al error.

El segundo propósito concreto es prever la manera en que se van a implementar las tareas en el aula de modo que sea beneficioso para superar errores. En el siguiente extracto se observa cómo los docentes, manteniendo el propósito general de que los estudiantes superen los errores, se centran ahora en el propósito más concreto de gestionar la implementación de las tareas en el aula.

El profesor deberá mantener una postura dinámica con preguntas, frente a las acciones y discusiones de los diferentes grupos, de tal manera que sea él quien controle cuándo y hasta dónde debe dejar a los diferentes grupos de estudiantes mediar con las dificultades que se presenten durante el desarrollo y posible solución de la tarea... Cuando los estudiantes se enfrenten a un error o a una dificultad, el profesor debe re-direccionar a los estudiantes con preguntas que provoquen una argumentación de las acciones desarrolladas, para poder superar el error.

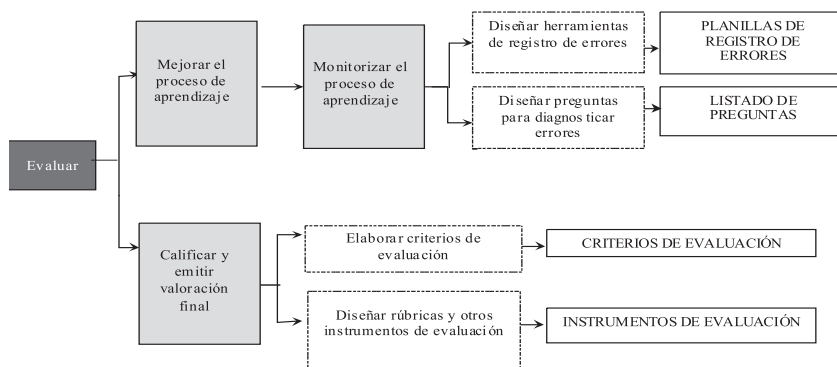
Este propósito lleva a los docentes a realizar diversas acciones. La primera de ellas es secuenciar tareas y da como resultado una ordenación concreta de las tareas que se van a proponer a los estudiantes; por ejemplo, un grupo de docentes propuso empezar por tareas sencillas que no inducen a error y, una vez estuviesen afianzados los conocimientos básicos, introducir otras tareas más complejas que indujesen a error. Las demás acciones que hemos constatado en la evidencia son diseñar y brindar ayudas, prever preguntas-guía, prever ejercicios extra, proponer agrupamientos, revisar errores y realimentar, socializar errores y corregir en grupo. Estas acciones dan lugar, como resultado, a previsiones de actuaciones concretas durante la implementación de las tareas en el aula. Por ejemplo, en el siguiente extracto, se ve la decisión que toma un grupo de docentes de diseñar y brindar ayudas para mejorar la implementación de las tareas y así superar errores.

Incluimos ayudas que pudieran optimizar la resolución de las tareas y abordar los posibles errores en los que los estudiantes pudieran incurrir.

Usos asociados al propósito de evaluar el estado cognitivo de los estudiantes

Los errores del tema se usan con el propósito de evaluar el estado cognitivo de los estudiantes sobre el tema matemático. Este propósito se concreta mediante otros dos propósitos y conlleva distintas acciones que dan lugar a cuatro usos del error. Los representamos en la figura IV y los explicamos a continuación.

FIGURA IV. Esquema de los usos del error para el propósito 2



El propósito de evaluar se concreta en dos propósitos. El primero de ellos es mejorar el proceso de aprendizaje llevando a cabo una evaluación formativa. Este propósito concreto conlleva el monitorizar el proceso de aprendizaje, para lo cual se realizan dos tipos de acciones. La primera es diseñar herramientas de registro de los errores que surgen durante el proceso de implementación. En los dos extractos siguientes los docentes hacen referencia a dos herramientas de registro de errores que han diseñado: la parrilla de observación y la lista de chequeo.

La parrilla de observación es un formato de clase que contiene el camino de aprendizaje³ previsto, los posibles errores en los que incurrirán los estudiantes y algunas actuaciones que puede realizar.

⁽³⁾ La expresión *camino de aprendizaje* que aparece en los siguientes extractos es la manera en que, en el programa de formación, se denomina a las estrategias de resolución de las tareas matemáticas que llevan a cabo los estudiantes.

En la lista de chequeo recogemos el seguimiento de cada una de las capacidades previstas dentro del camino de aprendizaje, así como el registro de los errores observados [...].

La segunda acción es diseñar preguntas específicas que buscan establecer si el estudiante ha superado o no ciertos errores en un momento concreto de la implementación. El segundo propósito concreto es calificar o emitir una valoración final sobre el estado cognitivo de los estudiantes tras un determinado periodo formativo. Por ejemplo, en el extracto siguiente, se observa que los docentes utilizan la aparición de errores con el propósito de argumentar que los estudiantes no han desarrollado una competencia prevista.

Habíamos previsto que, con la tarea, contribuyéramos a las competencias de lenguaje simbólico y representar. En relación con la primera competencia y de acuerdo con lo hecho por los estudiantes concluimos lo siguiente... no hay evidencia de que el grupo haya corregido los errores presentados en la expresión algebraica.

Para conseguir este propósito concreto, se usan los errores para llevar a cabo las acciones de enunciar los criterios de evaluación correspondientes al tema y de diseñar los instrumentos de evaluación. El siguiente extracto muestra el enunciado de un criterio de evaluación que tiene en cuenta los errores.

un estudiante ubicado en el nivel alto muestra un desempeño adecuado en las capacidades previstas para la actividad, desarrolla el camino de aprendizaje sin mayores dificultades, especialmente referidas a las algorítmicas e incurre en errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes

Usos asociados al propósito de producir información útil en otros aspectos de la planificación

Los errores del tema matemático se utilizan con el propósito de producir información útil en otros aspectos de la planificación. Los datos que hemos analizado muestran que este propósito general se concreta en dos

propósitos: formular expectativas de aprendizaje y formular hipótesis de aprendizaje. Para lograrlos, los docentes deciden realizar distintas acciones que dan lugar a cuatro usos del error. Los representamos en la figura V y los explicamos a continuación.

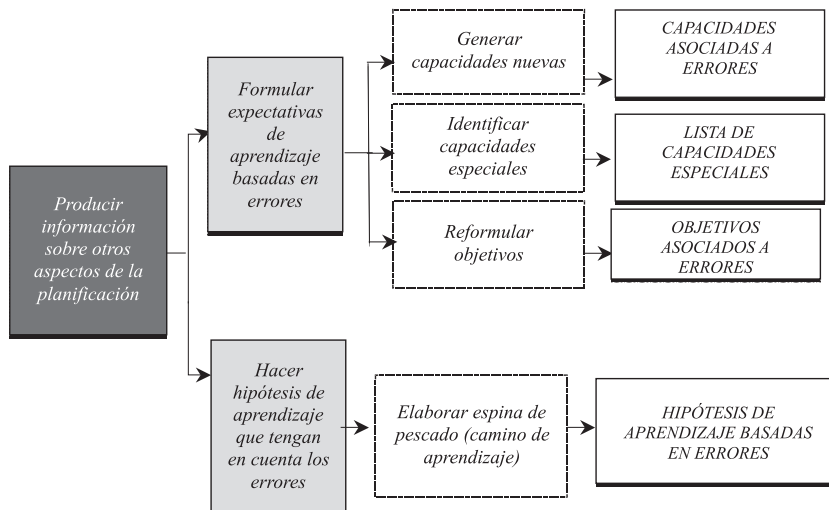
La formulación de expectativas de aprendizaje se logra a través de las acciones de generar capacidades nuevas que tengan en cuenta los errores, de identificar de forma específica ciertas capacidades especiales asociadas a errores importantes del tema y de reformular objetivos de modo que contemplen la necesidad de superar ciertos errores. Por ejemplo, el siguiente extracto muestra que los docentes han utilizado los errores para formular nuevas capacidades y hace referencia a las capacidades concretas que se han redactado.

Los errores han sido una guía principal en la formulación de las tareas. Algunos motivaron directamente la formulación de capacidades que luego consideramos en las tareas. Por ejemplo, el error E7.4 motivó la formulación de la capacidad C12...

Para formular hipótesis de aprendizaje que tengan en cuenta los errores se lleva a cabo la acción de incorporar los errores a los caminos de aprendizaje en un formato llamado “espina de pescado”. Este formato incorpora de forma explícita los momentos del proceso de resolución de una tarea en los que se prevé que los estudiantes incurran en errores. El siguiente extracto muestra cómo los caminos de aprendizaje incorporan la idea de error.

En la planeación de la unidad didáctica identificamos algunos errores en el aprendizaje del tema de razones trigonométricas. Incluimos esos errores en los caminos de aprendizaje, previendo en momentos en los que no tendrían éxito.

FIGURA V. Esquema del uso del error para el propósito 3



Conclusiones

En este artículo, proponemos un marco conceptual sobre la noción de decisión para indagar sobre el uso del error en la formación de profesorado de matemáticas. Con base en ese marco conceptual, establecemos los usos del error que pusieron de manifiesto, en sus informes finales, los grupos de docentes que participaron en un programa de formación. Determinamos los usos del error al identificar y organizar, en una estructura, ternas de extractos de texto que establecían un encadenamiento de propósitos, una acción para lograr un propósito concreto y el resultado de esa acción.

El análisis de las producciones de los grupos muestra una gran variedad de usos (16 en total) que se organizan en tres propósitos generales: superar el error, evaluar el estado cognitivo de los escolares y producir información útil en otros aspectos de la planificación. Es destacable la profusión de acciones y resultados que surgen en relación con el error en distintos momentos de la planificación. Estas acciones

afectan a todos los ámbitos de la práctica docente: por ejemplo, los objetivos de aprendizaje que selecciona el docente, las tareas para los estudiantes, la gestión del aula, la atención a la diversidad, la evaluación de los estudiantes y del proceso formativo. Esta variedad es remarcable, teniendo en cuenta que el programa de formación no promovió especialmente el uso del error de aprendizaje en la planificación. El error formaba parte, como uno más, de un conjunto de nociones pedagógicas utilizadas en el programa.

Este estudio complementa y profundiza los resultados obtenidos en otras investigaciones. Los grupos de docentes que participaron en nuestro plan de formación, al contrario que el profesorado estudiado por Santagata (2005) y el profesorado estadounidense estudiado por Schleppenbach et al. (2007), no pretendían corregir de modo directo o evitar el error. Los grupos de docentes en formación que hemos estudiado centraron la enseñanza en la selección e implementación de tareas que indujesen a los estudiantes a incurrir en los errores de aprendizaje habituales de un tema matemático. Así, la forma en la que estos docentes conciben el tratamiento del error es generar conflictos cognitivos que ayuden a los estudiantes a modificar sus conocimientos parciales. En relación con el propósito general de superar los errores, los usos del error que hemos identificado complementan la propuesta de acciones pedagógicas identificada por Son y Sinclair (2010) y Son (2013). Adicionalmente, nosotros hemos identificado y caracterizado los otros dos propósitos generales del uso del error que hemos mencionado antes.

Los resultados de este estudio son relevantes para el diseño e implementación de programas de formación de profesorado. Al poner de manifiesto la diversidad de usos del error que se dan en los planes de formación, se constata que esta conocimiento debe ser considerado de modo específico en el desarrollo del conocimiento profesional del profesorado. La estructura de propósitos generales y concretos, con sus respectivas acciones y resultados, pueden servir de guía para el diseño, desarrollo y seguimiento de las actividades formativas para el profesorado.

Limitaciones y prospectiva

Hemos presentado un estudio en el que indagamos sobre los usos del error de seis grupos de docentes en formación en un contexto particular.

Por consiguiente, no es posible generalizar los resultados: no se puede afirmar que otros grupos de docentes en formación manifiesten los mismos usos del error ni que esos sean los únicos usos del error que pueden aparecer.

La información que teníamos disponible limitó el análisis a los informes escritos de los grupos de docentes. La naturaleza de esta información no nos permitió abordar dos tipos de cuestiones que pretendemos investigar en el futuro.

La primera cuestión se refiere al seguimiento de los usos del error durante el proceso de implementación en el aula de las unidades didácticas desarrolladas. Esta cuestión nos parece especialmente relevante, puesto que, durante la planificación, el profesorado ha previsto la implementación de tareas asociadas al error y ha desarrollado instrumentos para controlarlo. El modo en que estos instrumentos se utilizan en un contexto nuevo, en el que el profesorado toma decisiones sobre la marcha, nos puede dar luz sobre los usos del error que se dan verdaderamente en el aula y sobre las relaciones entre los distintos procesos de toma de decisiones que lleva a cabo el profesor. Este tipo de indagación requiere, por un lado, entrevistar al docente y analizar videos de clase y, por el otro, reformular el marco conceptual para que se adapte al tipo de decisiones espontáneas (no previstas en la planificación) que surgen en el aula.

La segunda cuestión se refiere a la identificación de las técnicas asociadas al uso del error. El marco conceptual que hemos propuesto incluye la idea de técnica, pero la identificación detallada de técnicas en los procesos de toma de decisiones requiere el análisis de la interacción del profesorado durante el proceso de toma de decisiones. Este tipo de análisis requiere la grabación en audio y/o vídeo de sus interacciones. Nos interesa continuar este tipo de indagación para caracterizar las técnicas asociadas al uso del error; es decir, identificar los procedimientos, sustentados en razonamientos, que llevan a los docentes a seleccionar una opción y a ejecutar las acciones que surgen la opción seleccionada.

Referencias

- An, S. y Wu, Z. (2012). Enhancing mathematics teachers' knowledge of students' thinking from assessing and analyzing misconceptions in homework. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(3), 717-753.
- Bishop, A. J. (1976). Decision-making, the intervening variable. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1), 41-47.
- Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as «springboards for inquiry»: A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 166-208.
- Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.
- Borko, H., Roberts, S. A. y Shavelson, R. (2008). Teachers' decision making: From Alan J. Bishop to today. En P. Clarkson y N. Presmeg (Eds.), *Critical issues in mathematics education* (pp. 37-67). New York, NY: Springer.
- Brodie, K. (2014). Learning about learner errors in professional learning communities. *Educational Studies in Mathematics*, 85(2), 221-239.
- Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques : Etude dans le cadre de la théorie des situations didactiques. *Petit x*, 57, 5-30.
- Call, J. J. (2012). *Student Teachers' Interactive Decisions with Respect to Student Mathematics Thinking*. Tesis de doctorado. Brigham Young University, Provo, UH.
- Corbin, J. y Strauss, A. (1990). Grounded theory research: procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology*, 13(1), 3-21.
- Evans, J. St. B. T., Over D. E., y Handley S. J. (2003). A theory of hypothetical thinking. En D. Hardman y L. Macchi (Eds.): *Thinking: psychological perspectives on reasoning, judgment and decision making* (pp. 3-21). Chichester, UK: John Wiley.
- Garuti, R., Boero, P. y Chiappini, G. (1999). Bringing the voice of Plato in the classroom to detect and overcome conceptual mistakes. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 3-9). Haifa, Israel: PME.
- Hansson, S. O. (2005). *Decision theory. A brief introduction*. Documento no publicado. Stockholm, Suecia: Royal Institute of Technology (KTH).

- Heinze, A. y Reiss, K. (2007). Mistake-handling Activities in the Mathematics Classroom: Effects of an In-service Teacher Training on Students' Performance in Geometry. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 31, pp. 9-16). Seoul, Corea: PME.
- Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Keith, N. y Frese, M. (2008). Effectiveness of error management training: A meta-analysis. *Journal of Applied Psychology*, 93(1), 59.
- Lannin, J. K., Barker, D. D. y Townsend, B. E. (2007). How students view the general nature of their errors. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 43-59.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.
- Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(1), 73-93.
- Rach, S., Ufer, S. y Heinze, A. (2013). Learning from errors: effects of teachers training on students' attitudes towards and their individual use of errors. *PNA*, 8(1), 21-30.
- Rich, P. y Hannafin, M. (2008). Decisions and reasons: examining preservice teacher decision-making through video self-analysis. *Journal of Computing in Higher Education*, 20(1), 62-94.
- Rico, L. (1997). Reivindicació del error en el aprendizaje de las matemàtiques. *Epsilon*, 38, 185-198.
- Santagata, R. (2005). Practices and beliefs in mistake-handling activities: A video study of Italian and US mathematics lessons. *Teaching and Teacher Education*, 21(5), 491-508.
- Savage, L. J. (1951). The theory of statistical decision. *Journal of the American Statistical association*, 46(253), 55-67.
- Schifter, C. C., Natarajan, U., Ketelhut, D. J., & Kirchgessner, A. (2014). Data-Driven Decision Making: Facilitating Teacher Use of Student Data to Inform Classroom Instruction. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 14(4). Disponible en <http://www.citejournal.org/vol14/iss4/science/article1.cfm>

- Schleppenbach, M., Flevares, L. M., Sims, L. M. y Perry, M. (2007). Teachers' responses to student mistakes in Chinese and US mathematics classrooms. *The elementary school journal*, 108(2), 131-147.
- Schoenfeld, A. (2011). Toward professional development for teachers grounded in a theory of decision making. *ZDM*, 43(4), 457-469.
- Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. New York, NY: Routledge.
- Shavelson, R. J., Webb, N. M. y Burstein, L. (1986). Measurement of teaching. En Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 50-91). New York: Macmillan.
- Simon, M. y Schifter, D. (1991). Towards a constructivist perspective: An intervention study of mathematics teacher development. *Educational Studies in Mathematics*, 22(4), 309-331.
- Son, J.-W. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics*, 84(1), 49-70.
- Son, J.-W. y Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(4), 235-261.
- Son, J.-W. y Sinclair, N. (2010). How Preservice Teachers Interpret and Respond to Student Geometric Errors. *School Science and Mathematics*, 110(1), 31-46.
- Stefaniak, J. y Tracey, M. (2014). An examination of the decision-making process used by designers in multiple disciplines. *TechTrends: Linking Research & Practice to Improve Learning*, 58(5), 80-99.

Dirección de contacto: María José González. Universidad de Cantabria, Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación. Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria. Av. Los Castros s/n. 39005 Santander, España. E-mail: gonzalelm@unican.es

Error uses in teaching mathematics

Usos del error en la enseñanza de las matemáticas

DOI: 10.4438/1988-592X-RE-2015-370-297

María José González López

Universidad de Cantabria, Dpto. de Matemáticas, Estadística y Computación

Pedro Gómez

Ángela María Restrepo

Centro de Investigación y Formación en Educación de la Universidad de Los Andes

Abstract

Learning errors are involved in many decisions adopted by mathematics teachers. Although some studies show that alerting teacher trainees to the use of error in teaching makes their students more aware of their learning and improves their performance, little research has been conducted on such use. This article identifies and describes the uses of error reported by 26 mathematics teachers (working in groups) participating in a two-year training programme for practising mathematics teachers. The groups recorded and justified the teaching decisions adopted when planning their approach to mathematical topics. A conceptual framework was developed in the context of this study to analyse teachers' decision-making in the context of such planning. Based on the notions of purpose, action and result, the conceptual framework was used in the construction of an initial set of categories in keeping with which the groups' final reports were coded. The categories were refined via a cyclical process in which the raw data were re-coded and the categories revised. The aforementioned purposes, actions and results were subsequently ranked in light of the outcome of that process. The uses of error were found to relate to three general purposes: overcoming error, evaluating students' cognitive knowledge and generating information useful for other lesson planning-related questions. Each of these uses was characterised in terms of the specific purposes associated with each general purpose, the respective actions and the results deriving from each action. An

understanding of these uses is deemed to be useful for the design and development of teacher training programmes.

Keywords: Decision-making, learning errors, mathematics, lesson planning, secondary education, teacher education.

Resumen

Los errores de aprendizaje están presentes en muchas de las decisiones que el docente toma en relación con la enseñanza de las matemáticas. Pero, las investigaciones sobre el uso del error en la formación de profesorado son escasas, aunque algunas de ellas muestran que la formación en este ámbito hace a los estudiantes más conscientes de su aprendizaje y mejora su rendimiento. En este artículo, identificamos y describimos los usos del error que 26 docentes de matemáticas de secundaria (organizados en grupos) manifestaron en el contexto de un programa de formación de profesorado de matemáticas en ejercicio de dos años de duración. Para ello, desarrollamos un marco conceptual sobre procesos de toma de decisiones del profesorado cuando planifica la enseñanza de temas de matemáticas. Este marco conceptual está basado en las nociones de propósito, acción y resultado. Con base en este marco conceptual, establecimos un conjunto inicial de categorías que nos permitió codificar los informes finales de los grupos de docentes. En estos informes, ellos registraron las decisiones que tomaron al elaborar sus unidades didácticas de matemáticas y las justificaciones que les llevaron a tomarlas. Realizamos un proceso cíclico de refinado de las categorías y de nueva codificación de la evidencia con las nuevas categorías para verificar su validez. Este proceso nos permitió establecer una jerarquía entre los propósitos, las acciones y los resultados. Encontramos que los usos del error se organizan según tres propósitos generales: superar el error, evaluar el estado cognitivo de los estudiantes y producir información útil para otros aspectos de la planificación. Caracterizamos cada uno de estos usos mediante los propósitos concretos asociados a los propósitos generales, las acciones asociadas a cada propósito y los resultados vinculados a cada acción. Consideramos que conocer estos usos resulta útil para el diseño y desarrollo de programas de formación de profesores.

Palabras clave: Errores de aprendizaje, matemáticas, toma de decisiones, planificación curricular, educación secundaria, formación del profesorado.

Introduction

Errors are inherent in any learning process (Borasi, 1994; Lannin, Barker y Townsend, 2007; NCTM, 2000; Rico, 1997). The literature is rife with research reports that identify frequent student errors in mathematical topics, explore the source of such errors and put forward proposals geared to helping pupils overcome them (Santagata, 2005; Son, 2013; Son and Sinclair, 2010). Helping students to surmount common errors is, then, one of a teacher's primary goals in planning lessons on mathematical topics. Error may be present in other mathematics teachers' decisions, however. This article contains a detailed description of the processes in which teachers use error in mathematical topic lesson planning and delivery. More specifically, it is based on a conceptual framework for decision-making that identifies the wide variety of uses to which error was put by groups of participants in a training programme for practising mathematics teachers.

The article begins with a discussion of the relevance of research on error in mathematics education and a justification of this study as a contribution to the present state of the art on the subject, followed by a description of decision-making viewed as a conceptual framework for characterising the uses of error in mathematics lesson planning. On that basis, a definition of use of error is put forward and the focus of the study is established. The context of the empirical study is then described, along with the sources of information used and the tools and procedures deployed to collect and analyse the information. The uses of error identified in the empirical study are subsequently introduced. Lastly, a series of considerations on the uses of error in mathematics teacher training programmes are addressed.

Justification and relevance

Learning theories envision error in different ways (Santagata, 2005). In behaviourist theory, for instance, error is regarded as a knowledge deficiency to be remedied by the teacher. Constructivism regards error as the result of applying knowledge to the wrong context. This vision of error has implications for teaching. The aim is for new knowledge to arise from situations in which subjects' knowledge is thrown off balance

because their cognitive structures do not allow them to broach the situation appropriately (Simon y Schifter, 1991, p. 310). Consequently, in education based on the constructivist vision of learning, the inference is that teachers may induce their pupils to err, help them see their error and generate a cognitive conflict that ultimately modifies their knowledge (An and Wu, 2012; Borasi, 1996; Brousseau, 2001; NCTM, 2000).

On the grounds of that constructivist approach to learning, several researchers have proposed error-based teaching strategies. Borasi (1994), for instance, suggested that errors can be used as springboards for inquiry and showed this strategy to have beneficial effects on students' learning. Schoenfeld (2011) proposed teaching by diagnosis in which teachers anticipate students' actions (including errors) and build their teaching on such predictions. Garuti, Boero and Chiappini (1999) devised a "voices and echoes" game to broach conceptual errors. Lannin et al. (2007) and Prediger (2010) proposed using errors as learning catalysts. These and other researchers have put forward a number of ways in which teachers could use error in education.

What does research have to say about teachers' use of error in everyday practice? While a few scholars have explored such use of error, the literature on this subject is patchy (Heinze and Reiss, 2007; Santagata, 2005). In her comparative study of U.S. and Italian teachers, Santagata established the following categories to characterise reactions to error. Teachers (a) furnished the right answer; (b) repeated the question to the student who erred; (c) re-stated the question, providing some helpful hints; (d) asked the student to explain how she deduced her answer; (e) used the above strategies with a different student; (f) asked the class to identify the error and suggest alternative answers; (g) chose the right answer from among the students' replies. She found that in Italian classrooms error was treated publicly, whereas in the U.S. teachers confined their explanation to the student involved. In both countries, the most frequent reaction was for teachers to correct the error themselves. The assistance furnished consisted primarily in simplifying the problem that induced the error. Italian teachers tended to help the student who erred, while U.S. teachers turned to another student.

Other studies have yielded similar results. Some showed, for instance, that teachers in the U.K. tended to protect students' self-esteem, teachers in France reacted directly to students' errors, and teachers in Japan addressed errors positively, turning them into a source of class discussion.

Schleppenbach, Flevares, Sims and Perry (2007) found that while U.S. teachers tended to avoid or conceal errors, Chinese teachers encouraged students to reflect on why they erred. Son and Crespo (2009) showed that future mathematics teachers tended to repeat procedures until students could spot the error, ignoring possible underlying conceptual considerations. In a more recent study, Son (2013) confirmed that finding, whose explanation, as Santagata (2005) suggests, would appear to lie in history- and culture-related differences (p. 493).

Very few studies have been published on training teachers to use error (Heinze and Reiss, 2007, p. 3-10). In their meta-analysis of the effects of teacher training on handling error, Keith and Frese (2008) found the effect to be significant and beneficial in the 24 studies they reviewed. In the area of mathematics education, Rach, Ufer and Heinze (2013) observed that training teachers to be error-tolerant had a beneficial effect on students' attitudes, although no significant effects on their cognition were found. The Heinze and Reiss (2007) study showed that training teachers to use error in the classroom made students aware of how to handle error and improved their performance. Brodie (2014), in turn, reported that working in learning communities furthered teacher trainees' ability to identify, interpret and handle errors (as suggested by Prediger, 2010) and that such work induced them to reflect on their own knowledge.

The present study, which lies within the general scope of the research described, characterises the use of error by mathematics teachers participating in a training programme.

Decision-making

Different approaches have been adopted in the extensive literature on decision-making, depending on the context of the problems involved (Hansson, 2005). While many such studies draw from economics and are based on statistical models (Savage, 1951), in disciplines such as medicine, the environment, politics or education, qualitative analyses prevail (Kahneman, Slovic and Tversky, 1982). Some of the most recent studies are geared to determining whether decisions are pre-established or solutions are tailored to situations as they arise. In environments with many constraints, decision-makers have been observed to tailor solutions to each specific situation (Stefaniak and Tracey, 2014).

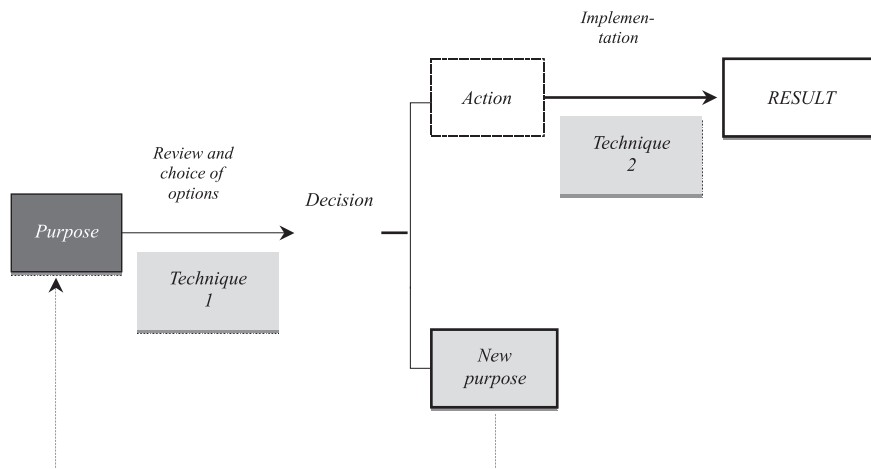
Bishop (1976) defined teacher decision-making to be pivotal to education. Decision-making has also been analysed from different perspectives (Borko, Roberts and Shavelson, 2008). Any number of papers have analysed the factors involved in teachers' classroom decisions in highly interactive situations that call for an immediate and spontaneous reaction to the incidents arising in practice (see Schoenfeld, 2010, for instance). Others, however, have studied teachers' decisions from the perspective of their analysis of data on students' progress (Schifter, Natarajan, Ketelhut and Kirchgessner, 2014). These studies have frequently attempted to deduce implications for teacher training, particularly initial training (Call, 2012; Rich and Hannafin, 2008).

The present paper addresses teacher trainee decision-making when planning and reflecting, outside the classroom, on how to teach a given lesson. In that context, teachers engage in quiet, prolonged reflection. The structure of that process is described below.

Decision-making structure

A decision is the result of a cognitive process conducted by a person or group choosing one from a series of options to fulfil a given purpose. The flowchart in Figure I was inspired by the ideas of Bishop (1976), Shavelson, Webb and Burstein (1986) and Evans, Over and Handley (2003). It depicts the basic structure of teachers' decision-making during pre-classroom planning of how to teach a given lesson. It shows the key notions involved in the process: purpose, technique, decision, action and result, described below and illustrated with examples of the use of error. The process begins with teachers' purpose. To fulfil it, they have a series of options from which to choose. They make a decision when, deploying certain techniques, they adopt one of those options. Decisions may lead either to: (a) an action, in which case the teacher uses a technique to implement the action and obtain a result; or (b) a new purpose, more specific than the first, in which case the process begins anew.

FIGURE I. Basic decision-making structure and key notions



Purpose, technique, decision, action and result

When drawing up a lesson plan for a mathematical topic, teachers may pursue a general or specific purpose in their treatment of student error. General purposes may often be narrowed down into other more specific purposes. In such cases, their decision consists in such purposes. For instance, to reach a general purpose such as

- P: to help students overcome errors committed in a given topic, teachers may decide to pursue a more specific purpose such as
- P1: to sequence mathematics tasks to address errors gradually.

Purposes may be successively narrowed, yielding a series of tiered, increasingly specific purposes until the only options available are specific actions implemented by the teacher to attain a result. For instance, when teachers pursue the specific purpose of sequencing tasks (P1), the decision involves choosing between the following actions:

- A1: introducing tasks in increasing order of difficulty, with the ones that induce students to err appearing at the end of the sequence only, or

- A2: distributing tasks in a way that confronts students with errors throughout the lesson.

Implementing an action yields a result. Here, the result of action A1 is a list of tasks with the simplest at the beginning and the most complex at the end, while the outcome of action A2 is a list containing complex tasks from start to finish. While a specific purpose and an action may be couched in similar terms, they differ in that the latter generates a result.

A technique is a suite of routine procedures supported by sound reasoning and intended to solve a problem. Two types of techniques are depicted in Figure I: (a) decision-making techniques (type 1) and (b) action implementation techniques (type 2). One decision-making technique is to review the alternatives available and select one of the options. Action implementation techniques enable teachers to generate a result from the option chosen. To implement tasks to help students overcome errors, for instance, teachers may first review the various options available and choose one: e.g., to design teaching aids for students as they perform a given task. In that review, a decision-making technique, they compare the effect of such aids and of other options on students' ability to overcome errors. After adopting a decision and generating an action (designing aid), teachers deploy techniques to perform the action and obtain a result. They may, for instance, analyse every mistake students are expected to make and prepare questions that alert them to their error. The result of such an action, implemented with such a technique, would be a list of error-associated questions.

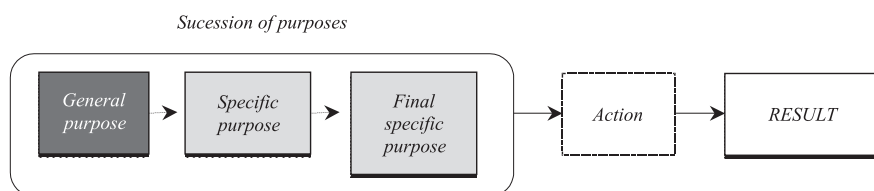
This conceptual framework underlies the definition of what is meant here by use of error, discussed below, along with the focus of the present study.

Use of error and focus of study

Further to the above conceptual framework, use of error is regarded here as a succession of teacher purposes involving the notion of error, which lead to an action and the result of that action (Figure II). Actions, which determine how errors are used, are associated with the last of a succession of purposes to be attained by a teacher. They generate results that have implications for lesson planning or implementation. As Figure

It shows, when addressing a general purpose, teachers may decide to implement an action or formulate one or a series of more specific purposes. Consequently, the succession of purposes begins with a general purpose and may entail the definition of one or more narrower specific purposes. The use of error is characterised by three components: the succession of purposes, the action associated with the final specific purpose and the result of that action.

FIGURE II. Sequence in use of error



This empirical study identified the uses of error applied by a group of participants in a training programme for practising mathematics teachers.

Methodology

This section describes the context of the empirical study, the participants, the sources of information used and the data coding process.

The training programme for mathematics teachers in which this research was conducted covered mathematics lesson planning, implementation and evaluation. Over a two-year period, participants worked in groups of four that systematically analysed a mathematical topic from different standpoints (including systems of representation, common errors and associated phenomenology). They determined the learning objectives pursued, designed a task sequence to attain their objectives, predicted students' performance in the tasks assigned, designed observation tools to evaluate learning and teaching, implemented the curriculum in place in their educational institutions,

assessed the relevance and effectiveness of the plan implemented, and established a new and improved design. Each group wrote up a report on these matters and formulated a lesson plan for a mathematical topic. The 100-page reports included the analysis of the mathematical topic, the decisions adopted by the groups during lesson formulation and their justification². This description of decisions and justifications provided insight into the purposes pursued by the teachers, the actions proposed and the results obtained. As learning errors may appear at any stage of the process, these reports were used as sources of information to identify the use of error.

The study was conducted with the first edition of the programme, in which 26 secondary school mathematics teachers, divided into six groups, participated. The topics addressed by the groups included addition and subtraction of whole numbers, linear equations (two groups), a graphical method for solving 2×2 linear equations, and trigonometric ratios (two groups). The teachers granted their written consent to participate in the study.

Basic categories were established to analyse the groups' reports, based on the above conceptual framework for decision-making: the purpose defined by the group of teachers, the action proposed or the result obtained. All the sections in the reports containing references to errors were extracted and the elements matching the analytical categories were identified in each extract.

The following is an example of one of the extracts selected.

When students are confronted with an error or difficulty, the teacher should guide them with questions that elicit reasoning around the action taken, to overcome the error.

Here the purpose identified was to "overcome the error" and the action "guide with questions". The results, which were not explicitly stated, would have entailed listing the specific questions to be posed.

Each extract was coded into a triad in terms of the above three factors (purpose, action, result), in which one or two of the fields could be void of content. These triads were then organised and inter-related by means of a cyclic procedure in which triads with similar purposes, actions or

⁽²⁾ Group reports can be downloaded on <http://is.gd/PAUfQ5>.

results were grouped together. The resulting groups were then ranked by purpose, distinguishing general from specific purposes and the sets of actions associated with each specific purpose were identified. The results associated with a given action were likewise grouped. This procedure yielded more refined analytical categories. Based on these new categories, the raw data were reviewed again to re-code the extracts and verify the validity of the new categories and their inter-relationships. This cyclical process of using the raw data to refine basic categories, in turn validated by re-coding the data, led to successive category refinement and structuring. The process was completed when the groups of purposes, actions and results generated no longer shared sufficient elements to be re-grouped.

Lastly, the uses of error were established as discussed in the following section, in which the extracts were matched to the refined categories obtained. Table 1 contains four related texts which together exemplify the use of error. In extract A, the teacher trainees defined a general purpose consisting in overcoming errors. In extract B, they narrowed this purpose to the specification of tasks that would induce students to err. In extract C they reviewed the tasks. Lastly, in extract D they reported that a specific task, which they called the Chicago Wheel, was chosen to overcome a specific error. Although the four extracts were found in separate sections of the report, they were associated with triads that were grouped together and ranked. The outcome was the description of one use of error: overcoming errors, in which the teachers proposed to define suitable tasks, implemented the respective action (i.e., choice of a task) and attained a result, namely the specification of the task chosen.

TABLE I. Coding extracts that together constitute use of error

Id.	Extract	Purpose	Action	Result
A	"When planning [...] we sought to enhance learning expectations for the lesson with the inclusion of overcoming difficulties."	To overcome errors		
B	"Errors were one of the key guides in task formulation."	To define tasks that would induce students to err		
C	"We specify tasks using the information obtained from our recently introduced instruction analysis organisers."		The group chose tasks	
D	"In the Chicago Wheel task, when asking for the answer to the initial situation [...] the students are asked [...] to apply the results to the problem posed. The idea is to overcome error E7.4."	To overcome errors		Specific task

Ranking the categories and hence the extracts was not an automatic exercise. Rather, it called for intense interpretation and justification by the researchers who, on the one hand, drew from their understanding of the training programme at issue and on the other reviewed the extracts in the context of the conceptual framework defined for the analysis.

Results: description of the uses of error

This section describes how the purpose, action and result categories were ranked. To facilitate the presentation of the findings, the ranks were matched to the description of the 16 uses of error identified.

The basic purpose category yielded the following three general purposes for which the teachers in the sample used error in lesson plans for mathematical topics:

- to enable students to overcome topic-related errors,
- to evaluate students' cognitive knowledge, and
- to generate information useful for other planning-related questions.

Each of these three purposes delimits a set of uses of error that were specified in different ways and at different times in the planning process. These uses are described in the following three sub-sections in conjunction with the purposes, actions or results appearing in the reports analysed.

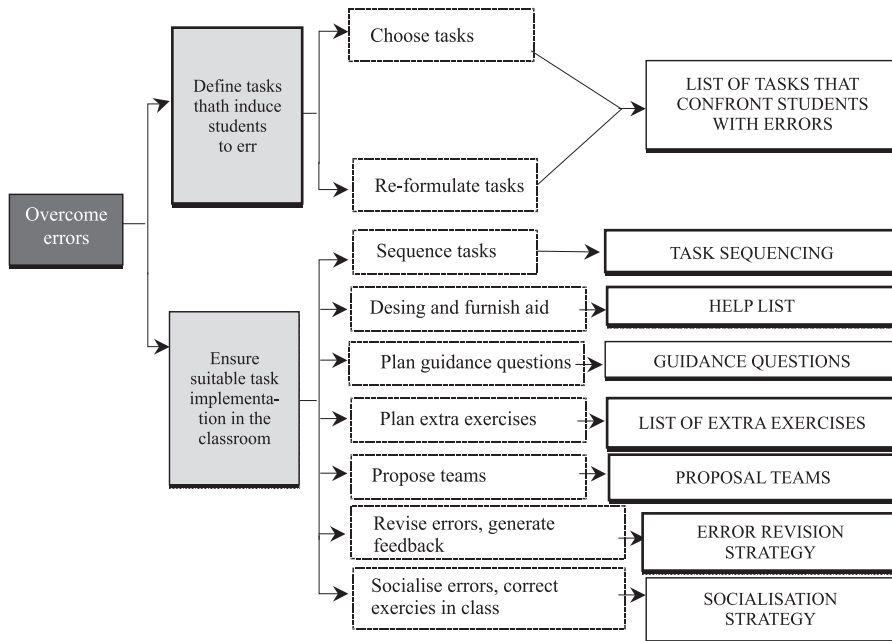
Uses associated with overcoming topic-related errors

Overcoming the errors associated with a topic was the general purpose defined most frequently by teachers participating in the training programme described here. They expressed this purpose in their final report in extracts such as the one reproduced below.

The lesson discussed below addresses the elements that we deem necessary to solve the problems encountered by seventh-year students in situations involving adding and subtracting whole numbers.

The flowchart in Figure III below shows the action categories and respective results. Eight uses of error were established under this general purpose. Some of them are exemplified in the discussion that follows with extracts from the teachers' final reports.

FIGURE III. Uses of error for purpose I



The general purpose, overcoming errors, was re-formulated as two specific purposes. The first was to define tasks that induce students to err. This gave rise to two types of actions: choosing the tasks from a set of given tasks and re-formulating existing tasks. In the following extract, for instance, teachers formulated part of a task with the explicit intention of overcoming an error.

To overcome error E4, with which we associated no skills, in the second phase [of the Chicago Wheel] we introduced work with identities, so that students could infer and generalise the results.

The two actions (select and re-formulate tasks) led to the same result: a list of tasks that confronted students with error.

The second specific purpose was to plan task implementation in the classroom in ways that would help overcome error. The extract below

shows how the teachers, while pursuing the general purpose, i.e., to help students overcome errors, focused on the more specific purpose of ensuring satisfactory classroom delivery.

The teacher's delivery should be dynamic, posing questions around team actions and discussion so that she controls when and to what extent she leaves the student teams on their own to handle the difficulties arising during the exercise and its possible solution... When students are confronted with an error or difficulty, the teacher should guide them with questions that prompt reasoning around the action performed, to overcome the error.

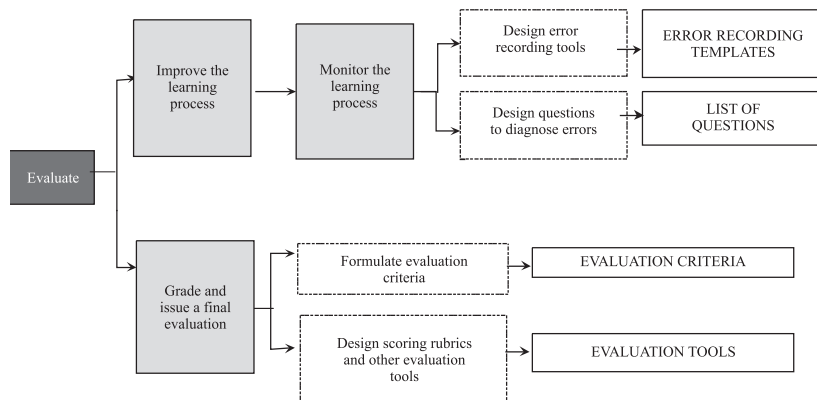
This purpose prompted teachers to take several actions. The first was to sequence tasks, whose outcome was a specific order in which they were assigned. One group of teachers, for instance, proposed to begin with simple tasks involving no error and, once the basic knowledge was acquired, to introduce more complex tasks that induced error. The other actions found in the raw data included designing and offering assistance, preparing guidance questions, preparing extra exercises, proposing student teamwork, revising errors and generating feedback, socialising errors and correcting exercises in the classroom. These actions translated into the preparation of specific actions to be implemented during the performance of classroom tasks. The following extract, for example, illustrates the decision adopted by a group of teachers to design and offer assistance to improve task performance and hence overcome errors.

We included aids that could optimise task performance and address the errors students might commit.

Uses associated with evaluating students' cognitive knowledge

The errors committed were used to evaluate students' cognitive knowledge of the mathematical topic. This purpose was broken down into two other purposes which in turn yielded a series of actions that involved the four uses of error graphed in Figure IV and explained below.

FIGURE IV. Uses of error for purpose 2



Evaluation was broken down into two further purposes. The first was to improve learning by assessing training. This led to monitoring the learning process, which entailed two types of actions. The first was to design tools for recording the errors arising during the exercise. In the two extracts reproduced below teachers described the two tools designed: an observation grid and a check-list.

The observation grid is a classroom format that contains the planned learning pathway³, possible student errors and action that can be taken.

The check-list is used to monitor each skill included in the learning pathway and record the errors observed [...].

The second action was to design specific questions to determine whether students had overcome certain errors at a given stage of the exercise. The second specific purpose was to issue a final evaluation of students' cognitive knowledge after a given training period. In the

⁽³⁾ The term learning pathway cited in the following extracts is defined in the training programme as student strategies to perform mathematical tasks.

following extract, for instance, teachers used the appearance of errors as proof that students had not mastered a given skill.

We thought that with this task we would contribute to symbolic language and representation skills. In connection with the former, we concluded... [that] there was no evidence that the class had corrected the errors committed in algebraic expression.

To fulfil this specific purpose, errors were used to establish evaluation criteria for a topic and design the respective evaluation tools. The following extract is an example of an evaluation criterion partially based on the observation of errors.

a high performer exhibited suitable skills in this activity and followed the learning pathway with apparent ease, particularly in connection with algorithms, but committed errors due to the application of irrelevant rules or strategies.

Uses associated with generating information useful for other planning-related questions

Errors committed in mathematical topics were used to generate information supporting other planning-related questions. The data analysed showed that this general purpose was broken down into two narrower purposes: formulating learning expectations and formulating learning hypotheses. The teachers decided to undertake a number of actions that involved the four uses of error represented in Figure V and explained below.

Learning expectations were formulated under actions in which new skills were acquired by building on errors, certain special skills associated with serious errors were specifically identified and objectives were re-formulated to embrace the need to overcome certain errors. The following extract shows that teachers used errors to formulate specific skills described in their reports.

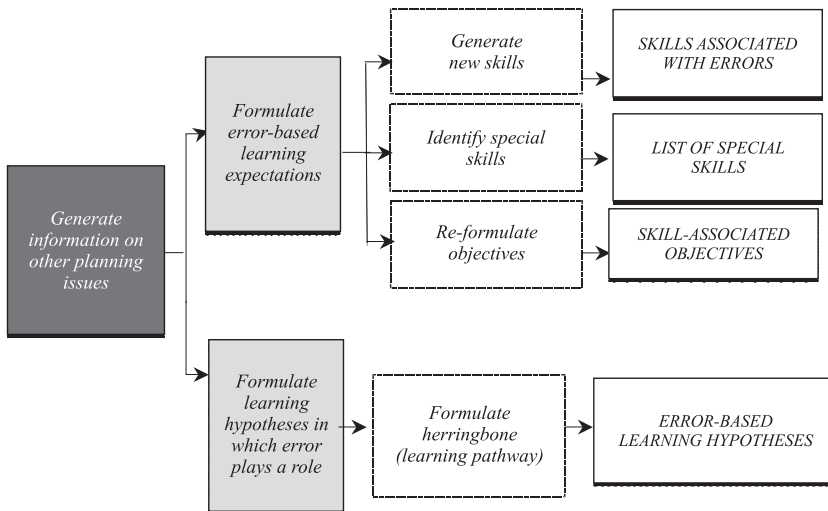
Errors were one of the key guides in task formulation. Some errors prompted the formulation of skills that were subsequently introduced

in tasks. Error E7.4, for instance, induced the formulation of skill C12...

In the formulation of learning hypotheses in which error plays a role, the action taken was to build errors into what was denominated the “herringbone” learning pathway. That format explicitly included the stages in task performance at which students were expected to commit errors. The following extract shows how error was incorporated into learning pathways.

When planning the lesson we identified certain learning errors in the topic dealing with trigonometric ratios. These errors were included in the learning pathways, with a prediction of the stages in which students were expected to be unsuccessful.

FIGUREV. Uses of error for purpose 3



Conclusions

This article proposes a conceptual framework for decision-making to explore the use of error in mathematics teacher training. Taking that framework as a basis, uses of error were identified in the final reports drafted by groups of teachers participating in a training programme. The uses of error were determined by relating triads that shared a given purpose, contained actions associated with a shared purpose and specified the results of such actions. The triads were then ranked on those grounds.

The analysis of the groups' output revealed a broad spectrum of uses (16 in all), which were classified under three general purposes: to overcome errors, to evaluate students' cognitive knowledge and to generate information useful for other planning-related questions. A substantial number of actions and results arose in connection with error at different stages of planning. These actions involved all areas of teaching: learning objectives, student tasks, classroom delivery, attention to diversity, student evaluations and training. This variety is remarkable, given that the training programme did not focus in particular on the use of learning errors in lesson planning. Error was just one of a series of educational conceits addressed in the programme.

The present study supplements earlier findings and pursues the respective research in greater depth. The groups of teachers participating in the present training programme, unlike the teachers studied by Santagata (2005) or the U.S. staff in Schleppenbach et al.'s (2007) survey, did not set out to directly correct or prevent error. The groups studied here focused on the choice and implementation of tasks that would induce students to commit learning errors routinely observed in connection with a given mathematical topic. Their approach to error was to generate cognitive conflicts that would help students modify their partial knowledge. The uses of error observed in the present study to be related to the general purpose of overcoming errors supplement the proposals for educational actions identified by Son and Sinclair (2010) and Son (2013). In addition, the present study identified and characterised two further general purposes related to the use of error, as discussed above.

The present findings are relevant to the design and implementation of teacher training programmes. The diversity of the use of error in

teacher training observed supports the premise that this practice should be explicitly addressed in the development of teachers' professional knowledge. The proposed structure, with general and specific purposes and their respective actions and results may serve as a guide for the design, development and monitoring of teacher training activities.

Limitations and future studies

The present study explored the uses made of error by six groups of teachers training in a specific context. Therefore, the findings cannot be generalised: other groups of teacher trainees might or might not use error in the same ways and the uses identified are not necessarily the only ones possible.

The information available limited the analysis to the participants' written reports. The nature of that information ruled out research into two issues that the authors aim to explore in future.

The first is error use monitoring during the classroom delivery of the lessons formulated. This issue is regarded as especially relevant because teachers prepare error-associated tasks and develop tools to monitor their implementation. The way that such tools are used in a new context in which teachers improvise decisions sheds light on the use of error actually present in the classroom and the relationships among teachers' decision-making processes. Such research calls, on the one hand, for interviews with teachers and analysis of classroom videos, and on the other, for re-formulating the conceptual framework for adaptation to spontaneous decisions (not foreseen in lesson plans) that arise in the classroom.

The second question deals with the techniques associated with the use of error. While the conceptual framework proposed covers technique, the detailed identification of techniques in decision-making calls for analysing teachers' interactions when adopting decisions. Such analysis entails classroom audio and video recordings of their interactions. This type of research is relevant to characterising the techniques associated with the use of error, i.e., identifying rationally designed procedures that induce teachers to select a given option and implement the actions arising from the option selected.

References

- An, S. y Wu, Z. (2012). Enhancing mathematics teachers' knowledge of students' thinking from assessing and analyzing misconceptions in homework. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(3), 717-753.
- Bishop, A. J. (1976). Decision-making, the intervening variable. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1), 41-47.
- Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as «springboards for inquiry»: A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 166-208.
- Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.
- Borko, H., Roberts, S. A. y Shavelson, R. (2008). Teachers' decision making: From Alan J. Bishop to today. En P. Clarkson y N. Presmeg (Eds.), *Critical issues in mathematics education* (pp. 37-67). New York, NY: Springer.
- Brodie, K. (2014). Learning about learner errors in professional learning communities. *Educational Studies in Mathematics*, 85(2), 221-239.
- Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques : Etude dans le cadre de la théorie des situations didactiques. *Petit x*, 57, 5-30.
- Call, J. J. (2012). *Student Teachers' Interactive Decisions with Respect to Student Mathematics Thinking*. Tesis de doctorado. Brigham Young University, Provo, UH.
- Corbin, J. y Strauss, A. (1990). Grounded theory research: procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology*, 13(1), 3-21.
- Evans, J. St. B. T., Over D. E., y Handley S. J. (2003). A theory of hypothetical thinking. En D. Hardman y L. Macchi (Eds.): *Thinking: psychological perspectives on reasoning, judgment and decision making* (pp. 3-21). Chichester, UK: John Wiley.
- Garuti, R., Boero, P. y Chiappini, G. (1999). Bringing the voice of Plato in the classroom to detect and overcome conceptual mistakes. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 3-9). Haifa, Israel: PME.
- Hansson, S. O. (2005). *Decision theory. A brief introduction*. Documento no publicado. Stockholm, Suecia: Royal Institute of Technology (KTH).

- Heinze, A. y Reiss, K. (2007). Mistake-handling Activities in the Mathematics Classroom: Effects of an In-service Teacher Training on Students' Performance in Geometry. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 31, pp. 9-16). Seoul, Corea: PME.
- Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Keith, N. y Frese, M. (2008). Effectiveness of error management training: A meta-analysis. *Journal of Applied Psychology*, 93(1), 59.
- Lannin, J. K., Barker, D. D. y Townsend, B. E. (2007). How students view the general nature of their errors. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 43-59.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.
- Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(1), 73-93.
- Rach, S., Ufer, S. y Heinze, A. (2013). Learning from errors: effects of teachers training on students' attitudes towards and their individual use of errors. *PNA*, 8(1), 21-30.
- Rich, P. y Hannafin, M. (2008). Decisions and reasons: examining preservice teacher decision-making through video self-analysis. *Journal of Computing in Higher Education*, 20(1), 62-94.
- Rico, L. (1997). Reivindicación del error en el aprendizaje de las matemáticas. *Epsilon*, 38, 185-198.
- Santagata, R. (2005). Practices and beliefs in mistake-handling activities: A video study of Italian and US mathematics lessons. *Teaching and Teacher Education*, 21(5), 491-508.
- Savage, L. J. (1951). The theory of statistical decision. *Journal of the American Statistical association*, 46(253), 55-67.
- Schifter, C. C., Natarajan, U., Ketelhut, D. J., & Kirchgessner, A. (2014). Data-Driven Decision Making: Facilitating Teacher Use of Student Data to Inform Classroom Instruction. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 14(4). Disponible en <http://www.citejournal.org/vol14/iss4/science/article1.cfm>

- Schleppenbach, M., Flevares, L. M., Sims, L. M. y Perry, M. (2007). Teachers' responses to student mistakes in Chinese and US mathematics classrooms. *The elementary school journal*, 108(2), 131-147.
- Schoenfeld, A. (2011). Toward professional development for teachers grounded in a theory of decision making. *ZDM*, 43(4), 457-469.
- Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. New York, NY: Routledge.
- Shavelson, R. J., Webb, N. M. y Burstein, L. (1986). Measurement of teaching. En Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 50-91). New York: Macmillan.
- Simon, M. y Schifter, D. (1991). Towards a constructivist perspective: An intervention study of mathematics teacher development. *Educational Studies in Mathematics*, 22(4), 309-331.
- Son, J.-W. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics*, 84(1), 49-70.
- Son, J.-W. y Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(4), 235-261.
- Son, J.-W. y Sinclair, N. (2010). How Preservice Teachers Interpret and Respond to Student Geometric Errors. *School Science and Mathematics*, 110(1), 31-46.
- Stefaniak, J. y Tracey, M. (2014). An examination of the decision-making process used by designers in multiple disciplines. *TechTrends: Linking Research & Practice to Improve Learning*, 58(5), 80-99.

Contact address: María José González. Universidad de Cantabria, Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación. Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria. Av. Los Castros s/n. 39005 Santander, España. E-mail: gonzalelm@unican.es

La *Revista de Educación* es una publicación científica del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte español. Fundada en 1940, y manteniendo el título de *Revista de Educación* desde 1952, es un testigo privilegiado de la evolución de la educación en las últimas décadas, así como un reconocido medio de difusión de los avances en la investigación y la innovación en este campo, tanto desde una perspectiva nacional como internacional. La revista es editada por la Subdirección General de Documentación y Publicaciones, y actualmente está adscrita al Instituto Nacional de Evaluación Educativa de la Dirección General de Evaluación y Cooperación Territorial.